SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

FORMULE DI MEDIA PER OPERATORI SUBELLITTICI DEL SECONDO ORDINE

6 APRILE 1989

1. Se L è un operatore ellittico del secondo ordine a coefficienti C^α in un aperto limitato Ω di R^n con frontiera di classe $C^{2,\alpha}$, e se G è la funzione di Green di L relativa ad Ω, le soluzioni del problema semilineare

$$(1.1) \qquad \begin{cases} -Lu = f(u) & \text{in } \Omega \\ u/\partial\Omega = 0 \end{cases}$$

sono i punti fissi dell'operatore

$$u \to T(u),$$

ove

$$T(u)(x) = \int_\Omega G(x,y) f(u(y)) dy$$

La determinazione dei punti fissi dell'operatore T consente allora di trovare soluzioni del problema (1.1) *regolari* sino alla frontiera, grazie alla proprietà di regolarità della funzione G.

Se però l'aperto Ω non è sufficientemente regolare, oppure se l'operatore L non è strettamente o uniformemente ellittico in Ω, la funzione di Green G, che potrebbe ugualmente esistere, in un opportuno senso debole, può non fornire informazioni sufficienti sulla regolarità, interna o fino alla frontiera, delle soluzioni di $T(u) = u$.

D'altra parte, se l'operatore L ha una soluzione fondamentale con alcune buone proprietà, le soluzioni dell'equazione *lineare*

$$Lu = f$$

possono venire caratterizzate, come appunto vedremo in queste note, da opportune *formule di media*, analoghe alle classiche formule per le funzioni armoniche. So

stituendo allora l'operatore di Green con gli operatori di media così ottenuti, si può pensare di riuscire a scomporre il problema (1.1) in due distinti problemi:

(I) determinazione di una *soluzione generalizzata* di (1.1) come punto fisso di un opportuno operatore di media. Tale soluzione generalizzata dovrà verificare la equazione $Lu = f(u)$ in Ω, indipendentemente dalla proprietà di regolarità di $\partial\Omega$;

(II) studio della regolarità di u sino alla frontiera sulla base delle proprietà di $\partial\Omega$.

In questa nota verranno dimostrate alcune formule di media e di rappresentazione per le soluzioni di equazioni lineari del tipo seguente

$$(1.2) \qquad Lu \equiv \sum_{j=1}^{\nu} X_j^2 u = f$$

dove $X_1,\ldots,X_\nu$ sono operatori differenziali del primo ordine verificanti una condizione geometrica che preciseremo nel seguito.

Ci proponiamo, in uno studio successivo, di applicare i risultati qui ottenuti, allo studio di problemi semilineari relativi all'operatore L in (1.2).

2. In questo paragrafo forniremo una breve rassegna sui teoremi della media per le soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Se Ω è un aperto di R^n, è ben noto che una funzione $u \in C(\Omega)$ (o anche soltanto $L_1^{loc}(\Omega)$) è soluzione in senso debole (e quindi anche in senso classico) dell'equazione

$$(2.1) \qquad \Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

se e solo se, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r>0$, $r<\text{dist}(x,\partial\Omega)$, valgono la formula media di superficie

$$(2.2) \qquad u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma(y)$$

o la formula di media di volume

$$(2.3) \qquad u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy$$

Le formule di media (2.2) e (2.3) sono rigidamente vincolate alle *funzioni armoniche* e alle *sfere euclidee*. Infatti, non solo, come abbiamo appena ricordato, la proprietà di media nelle sfere caratterizzano le funzioni armoniche, ma vale anche il viceversa.

Infatti ([ES]): se D è un aperto di R^n di misura finita e se esiste un punto $x_o \in D$ tale che

$$u(x_o) = \fint_D u\, dy$$

per ogni funzione armonica e sommabile in D, allora D è una sfera e x_o è il suo centro.

Analogamente ([FL]): se D è un aperto limitato di R^n con frontiera abbastanza regolare (ad esempio: $\partial D \in C^{1,\alpha}$) e se esiste un punto x_o D tale che

$$u(x_o) = \fint_{\partial D} u(y)d\delta(y)$$

per ogni funzione u armonica in un intorno di $\bar{D}$, allora D è una sfera e x_o è il suo centro.

La formula di media (2.2), dalla quale, con una integrazione in r si può ricavare la (2.3), si può scrivere nel modo seguente

$$(2.4) \qquad \int_{R^n} u(x+ry)d\mu(y) = 0$$

dove $\mu = \sigma - \delta_0$, δ_0 è la misura di Dirac col supporto in $\{0\}$ e σ è la misura di massa totale 1 uniformemente distribuita sulla superficie sferica $\{y \in R^n / |y| = 1\}$. Caratterizzazioni delle funzioni u che verificano la formula (2.4) per una fissata misura di Borel μ col supporto contenuto nella sfera unitaria sono state date da vari autori. Ricordiamo in particolare Walsch, Flatto, Friedman-Littman e Zalcman ([W], [F], [FL2], [Z]; cfr. anche la bibliografia citata in questi lavori). In [Z] viene provato il seguente Teorema, analogo a precedenti risultati di Flatto, Friedman e Littman:

Una funzione u continua in Ω verifica la formula (2.4) per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r>0$ tale che $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < r$, se e solo se u è soluzione debole del sistema

$$(2.5) \qquad \begin{cases} Q_n(D)u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ \\ n = 0,1,2,\ldots, \end{cases}$$

dove $Q_n(\xi) = \sum_{|\alpha|=n} A_\alpha \xi^\alpha$ e

$$\sum_\alpha A_\alpha z^\alpha = \int_{R^n} e^{-iz\cdot t} \, d\mu(t)$$

è la trasformata di Fourier-Laplace della misura μ.

Il sistema (2.5) è equivalente alla sola equazione

$$Q_p(D)u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

se e solo se Q_p divide Q_n per ogni $n \geq 0$.

Viceversa, se P è un *polinomio omogeneo,* esiste una misura μ tale che

$$u \in L_1^{loc}(\Omega), \quad P(D)u = 0 \quad \text{in} \quad \mathscr{D}'(\Omega) \iff u \text{ verifica (2.4).}$$

Il caso particolare $P(\xi) = |\xi|^2$ corrisponde, ovviamente, al caso delle funzioni armoniche.

L'estensione delle formule di media (2.1) o (2.2) alle soluzioni di operatori a coefficienti variabili *non* può quindi essere cercata nella forma (2.4).

Formule di *media asintotiche* per soluzioni di equazioni ellittiche e paraboliche sono state ottenute da Fulks [Ful] e da Talenti e Pucci [TP] i quali ultimi ne hanno fatto uno strumento per lo studio delle equazioni ellittiche in forma di non divergenza a coefficienti non regolari. Ricordiamo anche il lavoro di Sato [S] nel quale formule di media asintotiche per le soluzioni di $\Delta u = f$ vengono utilizzate nello studio di equazioni di Poisson semilineari.

Enunciamo esplicitamente una formula di media asintotica provata da Fulks, nella versione data da Talenti e Pucci.

Sia $L = \sum_{i,j} a_j(x)\, \partial^2_{ij}$, $a_{ij} = a_{ji}$, un operatore ellittico a *coefficienti limitati* in Ω. Allora, per ogni $u \in C^2(\Omega)$ e per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$u(x) = \fint_{E_r(x)} u(y)dy - \frac{r^2}{2(n+2)}\, Lu(x) + o(r^2) \quad \text{per} \quad r \to 0$$

dove, se $A = (a_{ij})$,

$$E_r(x) = \{y \in R^n / < A^{-1}(x)\,(x-y),\,(x-y) >< r^2\}$$

Osserviamo esplicitamente che l'ellissoide E_r è un insieme di livello della soluzione fondamentale dell'operatore a coefficienti costanti

$$L_x = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\, \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$$

ottenuto congelando i coefficienti di L nel punto x.

Formule di media esatte, sugli insiemi di livello delle corrispondenti soluzioni fondamentali, per soluzioni di *equazioni paraboliche* sono state ottenute, nel caso di operatori a coefficienti costanti da Pini, Fulks, Watson Kupcov, da Fabes e Garofalo e da Garofalo e Lanconelli nel caso di operatori a coefficienti variabili (per questi risultati rinviamo direttamente a [FG] e a [GL1] e alla bibliografia in essi contenuta). Concludiamo questo paragrafo citando i lavori [K] e [GL2] nei quali vengono provate formule di media per la soluzione di equazioni paraboliche degeneri del tipo di Kolmogorov.

3. In questo paragrafo stabiliremo le nuove formule di media alle quali abbiamo fatto riferimento nel paragrafo 1. I risultati che esporremo sono stati ottenuti in collaborazione con N. Garofalo.

Consideriamo un operatore L del tipo seguente

$$L = \sum_{\nu=1}^{p} X_\nu^2 \tag{3.1}$$

dove X_ν indica un operatore del primo ordine a coefficienti C^∞ in R^n, $n \geq 3$,

$$X_\nu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_\nu^k \partial_k \quad , \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{3.2}$$

Identifichiamo l'operatore X_ν con la funzione

$$R^n \ni x \to (\alpha_\nu^1(x), \ldots, \alpha_\nu^n(n)) \in R^n$$

Per ogni coppia $I = (i_1, i_2)$ con $1 \leq i_1, i_2 \leq p$, poniamo

$$X_I = [X_{i_1}, X_{i_2}].$$

Se poi $I = (i_1, \ldots, i_q, i_{q+1})$ è un multi-indice con le coordinate in $\{1, \ldots, p\}$,

poniamo

$$X_I = [X_{(i_1,\ldots,i_q)} , X_{i_{q+1}}].$$

Nel seguito faremo sempre la seguente ipotesi

(H1) rango $\mathscr{L}(X_1,\ldots,X_\nu)(x) = n \quad \forall x \in R^n$.

In altri termini: per ogni $x \in R^n$ esistono n multiindici $I^{(1)},\ldots,I^{(n)}$ tali che i vettori

$$X_{I^{(1)}}(x),\ldots,X_{I^{(n)}}(x)$$

sono linearmente indipendenti.

L'ipotesi (H1), per un ben noto Teorema di Hörmander, garantisce la ipoellitticità di L.

Sull'operatore L faremmo inoltre l'ipotesi che si possa scrivere nel modo seguente

(H2) $$L = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{ij} \partial_j).$$

Supporremo infine che, per un opportuno compatto F, risulti

(H3) $L = \Delta \quad$ in $R^n \setminus F$.

Questa ultima ipotesi è puramente di comodo e serve soltanto a garantire l'esistenza di una soluzione fondamentale su tutto R^n. Essa non è sempre necessaria come, ad esempio, nel caso dell'operatore di Laplace-Khon in R^3

(3.3) $$\Delta_k = (\partial_x + 2y\partial_t)^2 + (\partial_y - 2x\partial_t)^2.$$

Una soluzione fondamentale esplicita per questo operatore è stata determinata da Folland [Fo].

Esempio (di Folland). *Costruzione esplicita di una soluzione fondamentale per* Δ_k

Identifichiamo R^3 col prodotto cartesiano C x R e definiamo in esso la seguente legge di composizione interna

$$(z,t)(z',t') = (z+z', t+t'+2I_m z\cdot\bar{z}')$$

Con questa operazione $(CxR,\cdot)$ è un gruppo, il *gruppo di Heisenberg di grado* 1, H_1.

Posto

$$X = \partial_x + 2y\partial_t \quad , \quad Y = \partial_y - 2x\partial_t$$

si riconosce immediatamente che gli operatori X e Y sono *invarianti per traslazioni* a sinistra su H_1. Infatti, se indichiamo con $u = (z,t)$ e $v = (\zeta,\tau)$ due generici punti di H_1, posto $f_v(u) = f(v^{-1}u)$, si ha

$$Xf_v(u) = (Xf)(v^{-1}u) \quad , \quad Y f_v(u) = (Yf)(v^{-1}u)$$

per ogni f di classe C^1.

Ne viene allora che anche Δ_k è invariante per traslazioni a sinistra:

$$\Delta_k f_v(u) = (\Delta_k f)(v^{-1}u)$$

L'operatore Δ_k possiede inoltre la seguente proprietà di omogeneità. Se, per ogni $\lambda \in R$, definiamo

$$\delta_\lambda : H_1 \to H_1, \quad \delta_\lambda(z,t) = (\lambda z, \lambda^2 t)$$

allora, come si verifica in modo elementare,

$$\Delta_k f(\ {}_\lambda u) = \lambda^2 (\Delta_k u)(\delta_\lambda u)$$

Notiamo esplicitamente che la dilatazione δ_λ verifica la proprietà distributiva

$$\delta_\lambda(uv) = (\delta_\lambda u)(\delta_\lambda v).$$

Ora, posto

$$|u| = (|z|^4 + t^2)^{1/4} \quad \text{se} \quad u = (z,t),$$

si ha

(i) $\quad |u| = 0 \iff u = 0$

(ii) $\quad |\delta_\lambda u| = |\lambda|\ |u| \quad \forall \lambda \in R \ \text{ e } \ \forall u \in H_1$

(iii) $\quad |uv| \leq |u| + |v| \quad \forall u,v \in H_1$

La prova di (i) e (ii) è banale, mentre non lo è quella di (iii). Ur sua prova si trova in [C], pag. 371.

Da (i), (ii) e (iii) segue subito che

(3.4) $\quad d(u,v) = |v^{-1}u|$

è *una metrica* in H_1 *invariante e sinistra.*

Si può ora verificare direttamente che si ha

(3.5) $\quad (-\Delta_k)\ \left(\frac{1}{4\pi|u|^2}\right) = \delta_o.$

Allora, per l'invarianza di Δ_k rispetto alle traslazioni a sinistra, posto

$$(3.6) \qquad \Gamma(u,v) = \gamma(v^{-1}u) = \frac{1}{4\pi|v^{-1}u|^2} = \frac{1}{4\pi}\,(d(u,v))^{-2}$$

si ha

$$-\Delta_k \Gamma(\beta^{-1}\alpha) = (-\Delta\,\gamma)(\beta^{-1}\alpha) = \delta_{\beta^{-1}}$$

Dunque (3.6) è una soluzione fondamentale di Δ_k definita in tutto $R^3xR^3\setminus\{(u,u)/u\in R^3\}$.

Osserviamo esplicitamente che Δ_k verifica entrambe le ipotesi (H.1) e (H.2).

Come abbiamo appena visto, vi è in R^3 una metrica d legata in modo naturale all'operatore Δ_k: una opportuna potenza di d è una soluzione fondamentale per Δ_k.

Questa proprietà, che sussiste ovviamente per la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace rispetto alla distanza euclidea, non si può sperare che valga per *tutti* gli operatori verificanti (H1) e (H2) (eventualmente H3).

Per ogni operatore L verificante queste ipotesi vi è comunque una metrica in R^n, che indicheremo ancora con d, con la quale si possono esprimere stime molto precise nella soluzione fondamentale dell'operatore stesso.

Questa distanza è la cosiddetta *distanza di controllo* associata ai campi $X_1,\ldots,X_p$.

Ricordiamo anzitutto che l'ipotesi (H.1), per un teorema di Chow-Herman implica la $\{X_1\ldots X_p\}$ connettività di R^n. In altri termini: per ogni $x,y\in R^n$, esiste una curva continua $\gamma:[0,T]\to R^n$, regolare a tratti, tale che ogni suo tratto regolare è curva integrale di uno dei campi $\pm X_1,\ldots,\pm X_p$ (cioè una curva $\{X_1,\ldots,X_p\}$-ammissibile) e tale infine che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(T) = y$. Posto allora

$$d(x,y) = \inf\{T>0/\ \ \gamma:[0,T]\to R^n,\ \gamma\{X_1,\ldots,X_p\}\text{-amm.},\gamma(0) = x\ \gamma(T)=y\}$$

la funzione $(x,y) \to d(x,y)$ è una metrica in R^n (è la distanza di controllo associata ai campi $X_1,\ldots,X_p$).

Se la forma quadratica

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\,\xi_j$$

(Cfr. (H.2)) è definita positiva in ogni punto di R^n, allora d è localmente equivalente alla distanza euclidea. Nel caso di $L = \Delta_k$ in R^3 d è equivalente alla distanza introdotta da Folland (Cfr. Esempio precedente).

In generale, se L verifica (H.1), e se Γ è la sua soluzione fondamentale, per ogni compatto $K \subseteq R^n$ si ha

$$\Gamma(x,y) \overset{\sim}{=} \frac{d^2(x,y)}{|B(x,d(x,y))|} \quad \forall x,y \in K \tag{3.7}$$

(1)

dove

$$B(x,r) = \{y \in R^n / d(x,y) < r\}$$

e $|B|$ indica la misura di Lebesgue di B.

Sia ora D un aperto di R^n.

Se indichiamo con A la matrice (a_{ij}) e con D l'operatore gradiente a causa di (H.2) possiamo scrivere

$$vLu - uLv = \mathrm{div}(vADu - uADv)$$

per ogni $u,v \in C^\infty(D)$. Allora, se $\Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq D$ è un aperto sufficientemente regolare si ha

---

(1) $f \sim g$ in $K \iff \exists c>0$: $c^{-1}g \le f \le cg$ in K

$$(3.8)\qquad \int_{\Omega} (vLu-uLv)dx = \int_{\partial\Omega} (vADu - uADv)\cdot\nu d\sigma(y)$$

ove ν indica la normale esterna ad Ω.

Da (3.8), prendendo $V \equiv 1$, si ricava

$$(3.9)\qquad \int_{\Omega} Lu\, dx = \int_{\partial\Omega} A\nabla u\cdot\nu\, d\sigma.$$

Per ogni $x\in R^n$ e per ogni $r>0$ poniamo ora

$$(3.10)\qquad \Omega_r(x) = \{y\in R^n / \Gamma(x,y) > \frac{1}{r}\}\ .$$

Poiché $y \to \Gamma(x,y)$ è C^∞ in $R^n\setminus\{x\}$, per quasi ogni $r>0$ l'insieme $\{y\in R^n/\Gamma(x,y)= \frac{1}{r}\}$ è una $(n-1)$-varietà di classe C^∞ e risulta

$$\partial\Omega_r(x) = \{y\in R^n/\Gamma(x,y) = \frac{1}{r}\}$$

Sia ora x_o un fissato punto di Ω. Poiché

$$(3.11)\qquad \Gamma(x,y) \overset{\sim}{=} \frac{d^2(x,y)}{|B(x,d^2(v,y))|} \to +\infty \quad \text{per} \quad y\to x$$

(ciò segue dal fatto che, almeno localmente $|x-y| \le cd(x,y)$ e, quindi

$$\frac{d^2}{|B(x,d)|} \ge C_1 \frac{d^2}{d^n}\ ),$$

esiste $r_o = r_o(x_o)$ tale che

$$\Omega_r(x_o)\subseteq D \quad \forall r\in]0,r_o[\ .$$

Applichiamo ora le identità di Green (3.8) all'aperto

$$\Omega_{r,\varepsilon} = \Omega_r(x_0)\setminus\bar{\Omega}_\varepsilon(x_0) \quad , \quad 0<\varepsilon<r<r_0,$$

scegliendo $v = \Gamma(x_0,\cdot)$. Allora, poiché $Lv = 0$ in $\Omega_{r,\varepsilon}$ si ha:

$$(3.12)\qquad \int_{\Omega_{r,\varepsilon}} \Gamma(x,y)Lu(y)dy = \int_{\partial\Omega_r(x_0)} (\Gamma\, A\nabla u - uA\nabla\Gamma)\nu\, d\sigma$$

$$- \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\Gamma\, A\nabla u - uA\nabla\Gamma)\nu\, d\sigma$$

Ora:

$$(3.13)\qquad \int_{\partial\Omega_r(x_0)} \Gamma\, A\nabla u\cdot\nu d\sigma = \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r(x_0)} A\nabla u\cdot\nu\, d\sigma = \text{(per la (3.9))}$$

$$= \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r(x_0)} Lu\, dy.$$

Analogamente

$$(3.14)\qquad - \int_{\partial\Omega_\varepsilon(x_0)} \Gamma A\nabla u\cdot\nu d\sigma = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon(x_0)} Lu\, dy.$$

Inoltre

$$(3.15)\qquad - \int_{\partial\Omega_r} uA\nabla\Gamma\cdot\nu d\sigma = \int_{\partial\Omega_r} u\,\frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|}\, d\sigma$$

in quanto su $\partial\Omega_r$ risulta $\nu = -\frac{\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|}$.

Analogamente

$$(3.16)\qquad \int_{\partial\Omega_\varepsilon(x_0)} uA\nabla\Gamma\cdot\nu d\sigma = -\int_{\partial\Omega_\varepsilon(x_0)} u\,\frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|}\,d\sigma$$

Per valutare il comportamento degli integrali precedenti per $\varepsilon\to 0$, premettiamo alcuni lemmi.

Lemma 1. Per ogni fissato $x_0 \in R^{n-1}$ la funzione

$$y \to \frac{d(x_0,y)}{|B(x_0,d(x_0,y)|}$$

è localmente sommabile.

Dimostrazione. ricordiamo che, almeno localmente

$$|B(x,2r)| \overset{\sim}{=} |B(x,r)|$$

per ogni $r>0$ ([NSW], Teorema 1). Allora

$$\int_{d(x_0,y)\le 1} \frac{d(x,y)}{|B(x,d(x,y))|}\,dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(\frac{1}{2})^K \le d \le (\frac{1}{2})^{k-1}} \frac{d}{|B(x,d)|}\,dy$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|B(x_0,(\frac{1}{2})^{k-1})|}{|B(x_0,(\frac{1}{2})^k|} \le C \sum_{k=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{k-1} .$$

Corollario 1. Le funzioni

$$(3.17) \qquad y \to |\Gamma(x_0,y)| \text{ e } y \to |A(y)\nabla_y\Gamma(x_0,y)\cdot\nabla_y\Gamma(x_0,y)|^{1/2}$$

sono localmente sommabili.

Dimsotrazione: La sommabilità di $\Gamma(x_0,y)$ segue subito dalla (3.7) e dal Lemma 1. D'altra parte, poiché

$$|A(y)\nabla_y\Gamma(x_0,y)\cdot\nabla_y\Gamma(x_0,y)| \le C\,\frac{d^2(x_0,y)}{|B(x_0,d(u_0,y)|^2}$$

(Cfr. [SC]), anche la sommabilità della seconda funzione in (3.17) discende subito dal Lemma 1.

Lemma 2. Per ogni fissato $x_0 \in R^n$ si ha

$$\frac{1}{r}\,|\Omega_r(x_0)| \to 0 \quad \text{per} \quad r \to 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{1}{r}|\Omega_r(x_0)| \le \int_{\Omega_r(x_0)} \Gamma(x_0,y)dy \le C \int_{\Omega_r(x_0)} \frac{d^2}{|B(x_0,d)|}\,dy$$

$$\le C \sup_{y\in\Omega_r(x_0)} d(x_0,y) \int_{\Omega_{\frac{r}{r}}(x_0)} \frac{d}{B(x_0,d)}\,dy = \text{(per il lemma 1)}$$

$$= C_1 \sup_{y\in\Omega_r(x_0)} d(x_0,y) \quad , \quad \forall r \in]0,\bar{r}[.$$

Ma ora $y \in \Omega_r(x_0) \Rightarrow \dfrac{d(x_0,y)}{|B(x_0,d(x_0,y)|} \geq \dfrac{c}{r} \Rightarrow \dfrac{|B(x_0,d(x_0,y)|}{d^2(x_0,y)} \leq \dfrac{r}{c}$

e quindi

$$(3.1) \qquad \frac{1}{r}|\Omega_r(x_0)| \leq C \sup \{d/ \frac{B(x_0,d)}{d^2} \leq \frac{r}{c}\}$$

Ora, la funzione $d \to \dfrac{B(x_0,d)}{d^2}$ è equivalente ad una funzione crescente come si può ricavare direttamente, almeno per d sufficientemente piccolo, dalla esplicita stima di $|B(x_0,d)|$ data in [NSW] , pag. 110, o come si può dedurre dal fatto che $\dfrac{|B(x_0,d)|}{d^2}$ è equivalente alla L-capacità di $B(x_0,d)$ (Cf. [NS]) e dal fatto che la L-capacità è una funzione crescente di insieme. Quest'ultima osservazione consente subito di affermare che si ha anche

$$\frac{|B(x_0,d)|}{d^2} > 0 \qquad \text{se} \quad d>0.$$

Inoltre, per quanto visto in precedenza

$$\frac{B(x,d)}{d^2} \to 0 \quad \text{per} \quad d \to 0.$$

Dalla (3.18) si ottiene allora l'asserto.

Con i lemmi e il Corollario appena provati, siamo ora in grado di stimare il comportamento degli integrali che figurano nella (3.12) per $\varepsilon \to 0$. Si ha

$$\int_{\Omega_{r,\varepsilon}} \Gamma(x_0,y)Lu(y)dy \to \int_{\Omega_r(x_0)} \Gamma(x_0,y)Lu(y)dy \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0$$

grazie al Corollario 1. Inoltre, per la (3.14)

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon(x_0)} \Gamma A\nabla u\cdot\nu d\sigma \right| \le \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon(x_0)} |Lu|dy \to 0 \quad \text{per} \quad \varepsilon\to 0$$

grazie al Lemma 2. Valutiamo infine l'integrale in (3.16).

Per ogni $\phi \in C_0^\infty(D,R)$ tale che $\phi \equiv 1$ su $\overline{\Omega_\varepsilon(x_0)}$, si ha

$$u(x_0) = \langle \delta_{x_0}, u\phi\rangle = -\langle L\Gamma(x_0,\cdot),\ u\phi\rangle$$

$$= -\int_{R^n} \Gamma(x_0,y)L(u\phi)dy = \text{(per il Corollario 1)}$$

$$= \int_{R^n} A\nabla\Gamma\cdot\nabla(u\phi)dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{R^n\setminus\Omega_\varepsilon(x_0)} A\nabla\Gamma\cdot\nabla(u\phi)dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma(x_0,y)\le \frac{1}{\varepsilon}} A\nabla\Gamma\cdot\nabla(u\phi)dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{\Gamma(x,y)=\frac{1}{\varepsilon}} \frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|} u\, d\sigma - \int_{\Gamma(x_0,y)\le\frac{1}{\varepsilon}} L\Gamma u\phi dx \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma(x_0,y)} \frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|} u\, dx.$$

In definitiva, per $\varepsilon\to 0$, da (3.12) si ricava

$$(3.19)\quad u(x_0) = \int_{\partial\Omega_r(x_0)} u \frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|} d\sigma - \int_{\Omega_r(x_0)} Lu(\Gamma - \frac{1}{r})dy$$

Da questa formula di media superficiale si ottengono subito, grazie alla formula di coarea, formule di media di volume. Infatti, moltiplicando entrambi i membri di (3.14) per r^α, con $\alpha \in R$, $\alpha \neq -1$, e integrando su $[0,R]$, si ottiene

$$\frac{R^{\alpha+1}}{a+1}\, u(x_0) = \int_0^R r^\alpha \Big(\int_{\partial\Omega_r(x_0)} u\, \frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|}\, d\sigma \Big) dr$$

$$- \int_0^R r^\alpha \int_{\Omega_r(x_0)} Lu \Big(\Gamma - \frac{1}{r}\Big) dy$$

Ora

$$\int_0^R r^\alpha \int_{\partial\Omega_r(x_0)} \frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|}\, d\sigma\, dr = \int_0^R r^\alpha \int_{\Gamma = \frac{1}{r}} u\, \frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|}\, d\sigma\, dr$$

$$= \int_{\frac{1}{R}}^{+\infty} \rho^{-\alpha-2} \Big(\int_{\Gamma=\rho} u\, \frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{|\nabla\Gamma|}\, d\sigma \Big) d\rho =$$

$$= \int_{\frac{1}{R}}^{+\infty} \int_{\Gamma=\rho} u\, \frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{\Gamma^{\alpha+2}}\, \frac{1}{|\nabla\Gamma|} d\sigma\, d\rho = \text{(per la formula di coarea)}$$

$$= \int_{\Gamma > \frac{1}{R}} u\, \frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{\Gamma^{\alpha+2}}\, dy$$

In definitiva

$$(3.15)\qquad u(x_0)= \frac{\alpha+1}{R^{\alpha+1}} \int_{\Omega_R(x_0)} u\,\frac{A\nabla\Gamma\cdot\nabla\Gamma}{\Gamma^{\alpha+c}}\,dy - \int_0^R \rho^{\alpha}\Big(\int_{\Omega_\rho(x_0)} Lu(\Gamma - \frac{1}{\rho})dy\Big)d\rho$$

Notiamo esplicitamente che entrambi i nuclei che figurano al secondo membro di (3.15) sono non negativi.

BIBLIOGRAFIA

[ES] E. EPSTEIN, M. SCHIFFER, J. d'Analyse Mathem., 24 (1965).

[F] L. FLATTO, J. Math. Mech. 10 (1961).

[FL] A. FRIEDMAN, W. LITTMAN, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962).

[FG] E. FABES, N. GAROFALO, J. Math. Anal. Appl. 121 (1987).

[GL1] N. GAROFALO, E. LANCONELLI, Math. Annalen, 91 (1989).

[GL2] N. GAROFALO, E. LANCONELLI, Tans. Amer. Math. Soc., to appear.

[K] L.P. KUPOV, Math. Notes 15 (1974).

[FO] G.B. FOLLAND, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973).

[C] J. CYGAN, Coll. Math. 39 (1978).

[NSW] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER, Acta Math. 155 (1985).

[NS] P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI, J. of Diff. Equation 115 (1986).

[S] T. SATO, Compositio Mat. 14 (1956).

[SC] A. SANCHEZ-CALLE, Invent. Math. 78 (1984).